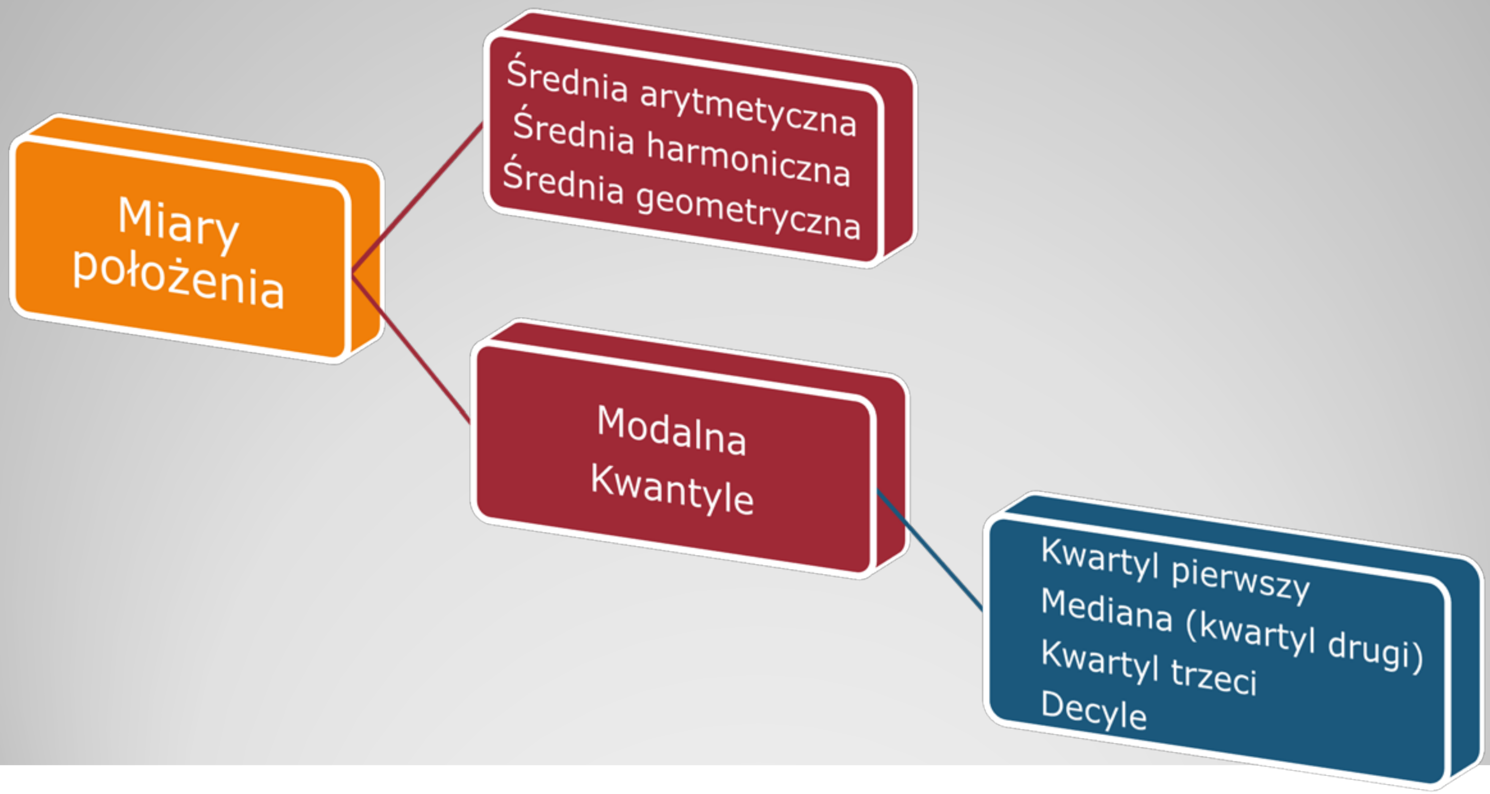
Miary położenia wskazują miejsce wartości najlepiej reprezentującej wszystkie wielkości danej zmiennej. Mówią o przeciętnym poziomie analizowanej cechy.



Średnia arytmetyczna – suma wartości zmiennej wszystkich jednostek badanej zbiorowości podzielona przez liczbę tych jednostek.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

gdzie: $\bar{x}$ - symbol średniej arytmetycznej,
x_i - warianty cechy mierzalnej,
N - liczebność badanej zbiorowości

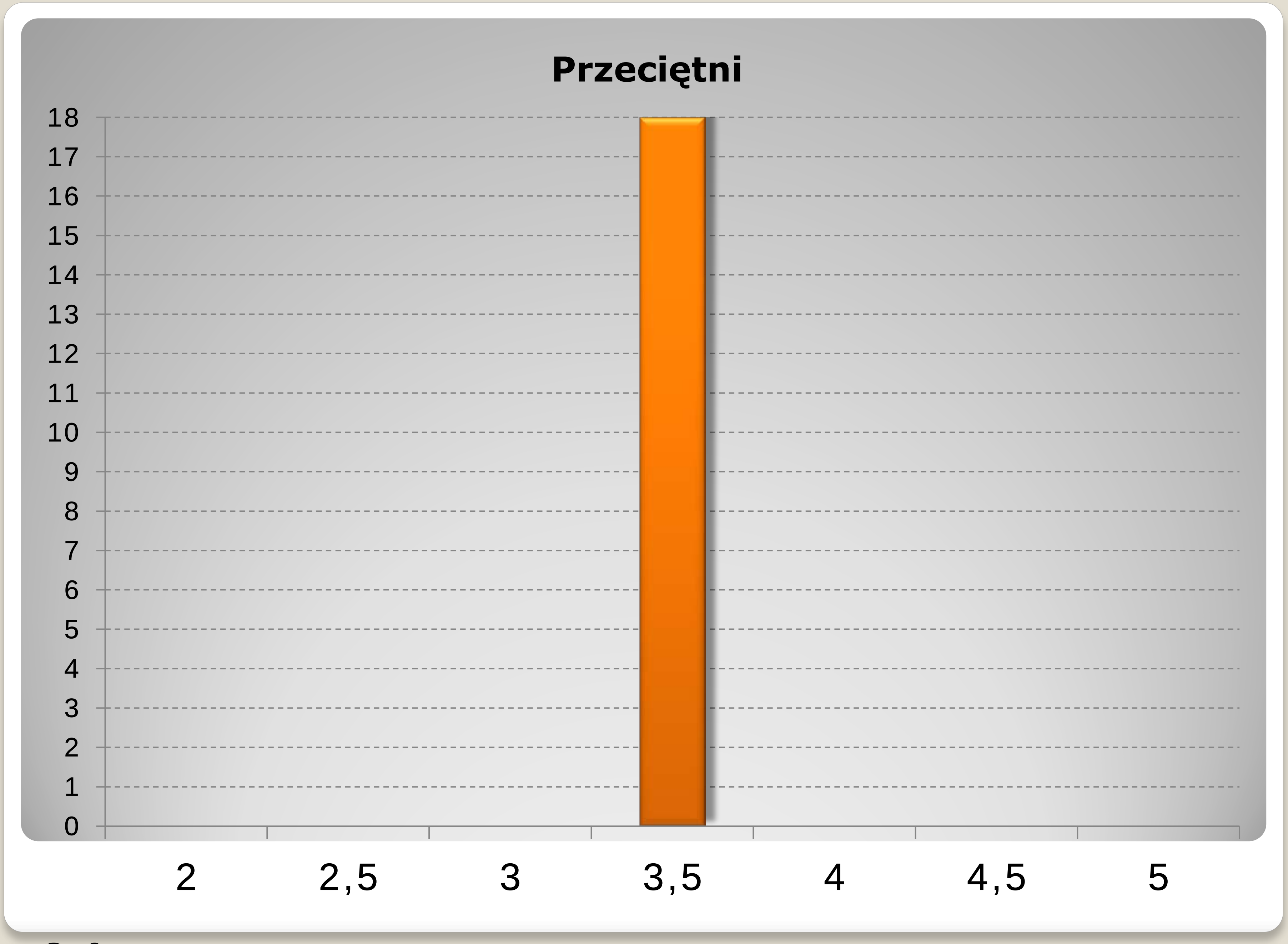
$$\bar{x} = \frac{1+3+5+7}{4} = 4$$

$$\bar{x} = \frac{1+3+5+5+5+5+7}{7} = 4,43$$

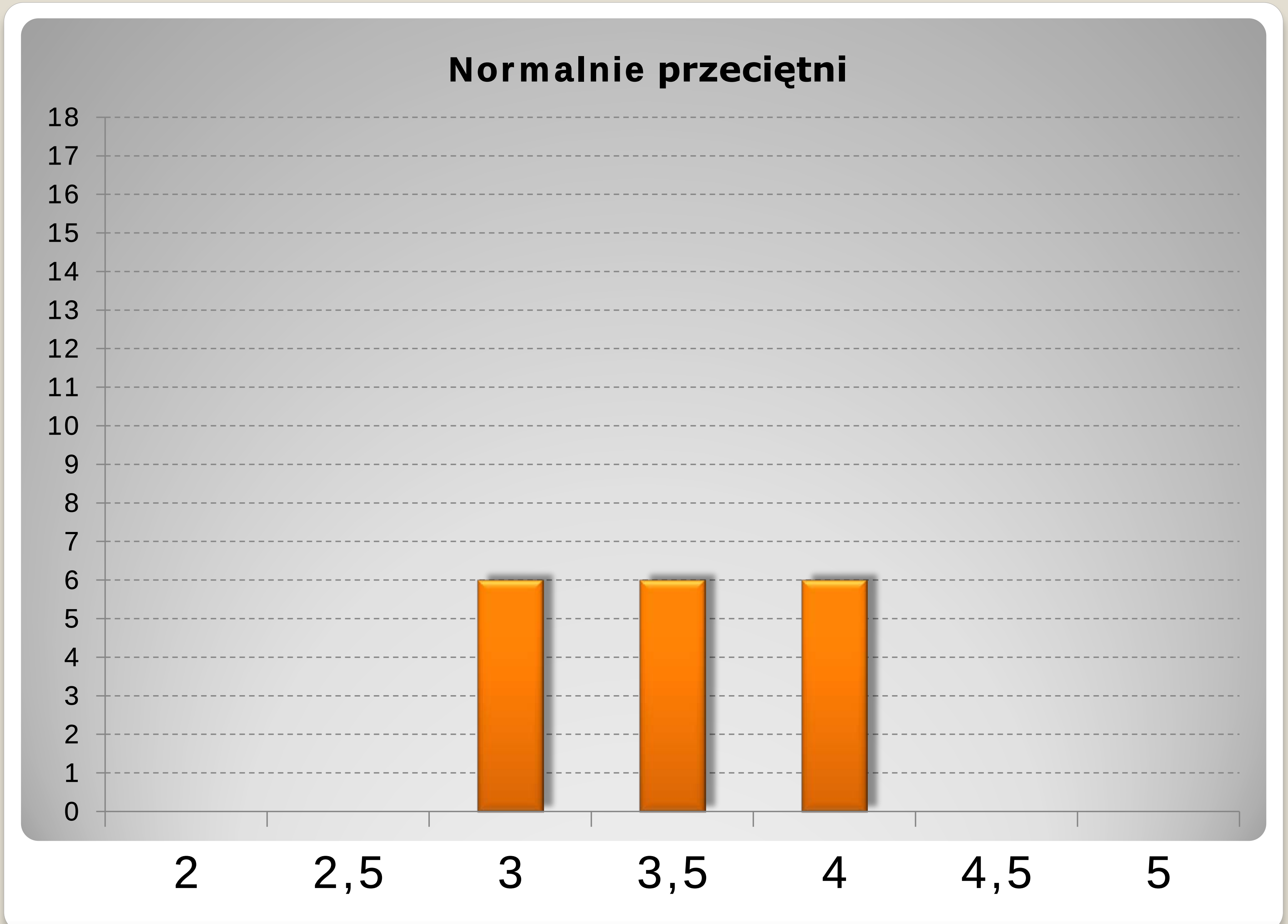
$$\bar{x} = \frac{1+3+30\times 5+7}{33} = 4,88$$

$$\bar{x} = \frac{1+3+5+7+20}{5} = 7,2$$

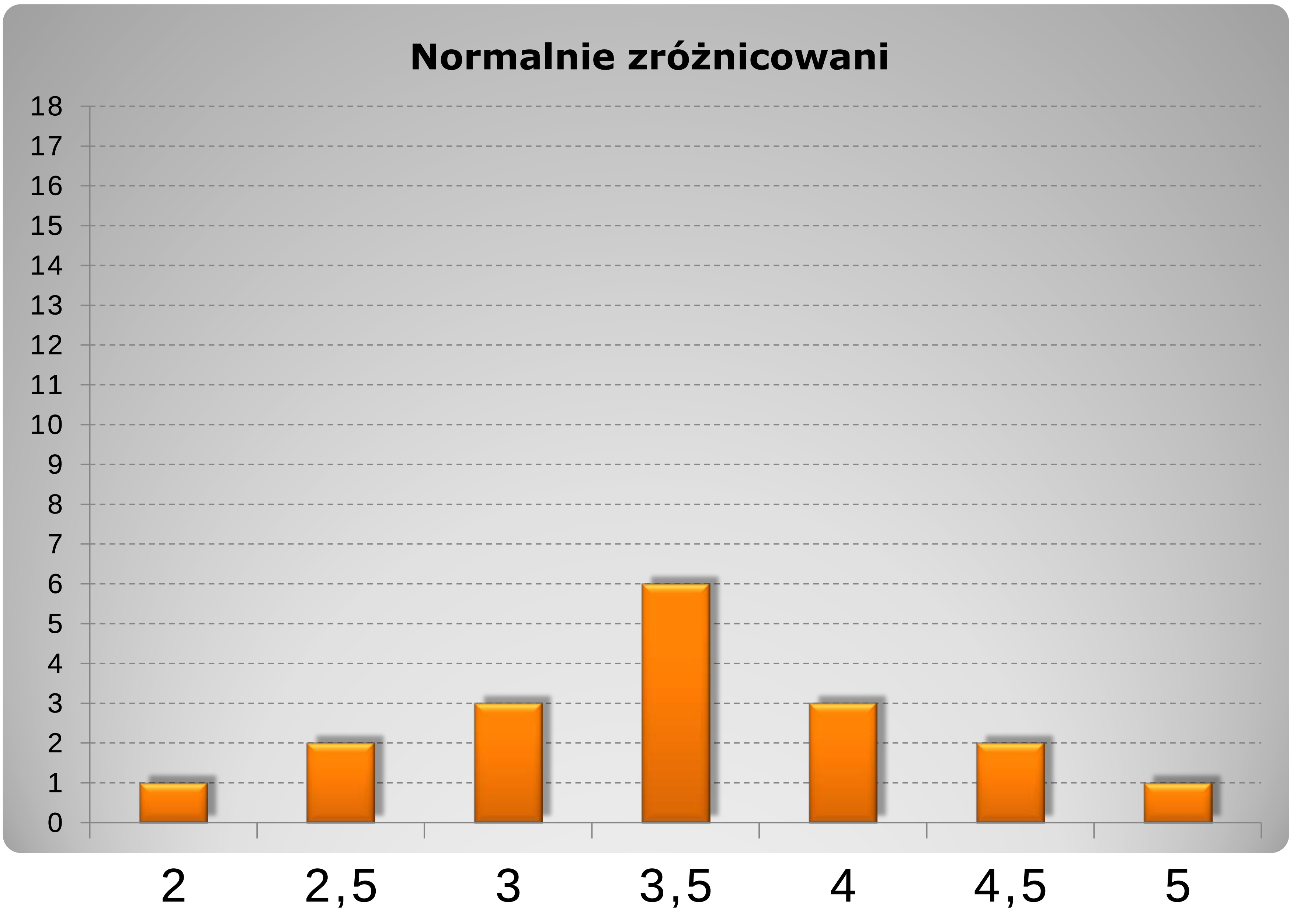
Właściwości średniej arytmetycznej



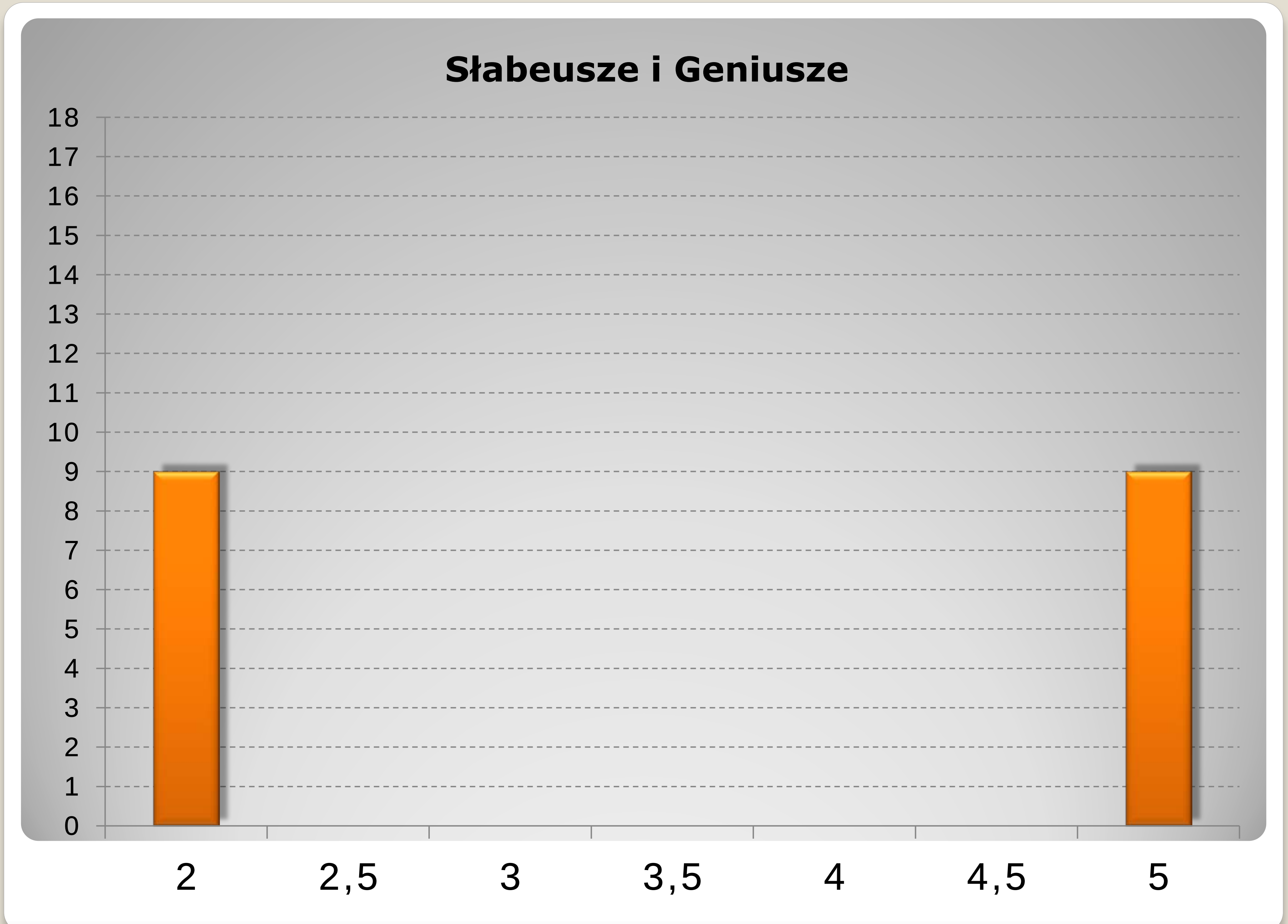
S=0


Normalnie przeciętni
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
2
2,5
3
3,5
4
4,5
5

S=0,42


Normalnie zróżnicowani
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
2
2,5
3
3,5
4
4,5
5

S=0,77


Słabeusze i Geniusze
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
2
2,5
3
3,5
4
4,5
5

S=1,54

Średnia wyliczana z szeregów rozdzielczych punktowych

$$\overline{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_i n_i}{n}$$

gdzie: $\overline{x}$ - symbol średniej arytmetycznej,

$x_1 \cdots x_i$ - kolejne wartości zmiennej,

$n_1 \ldots n_i$ - liczba jedn. odpowiadająca danym wariantom zmiennej

n - liczebność

Średnia wyliczana z szeregów rozdzielczych przedziałowych

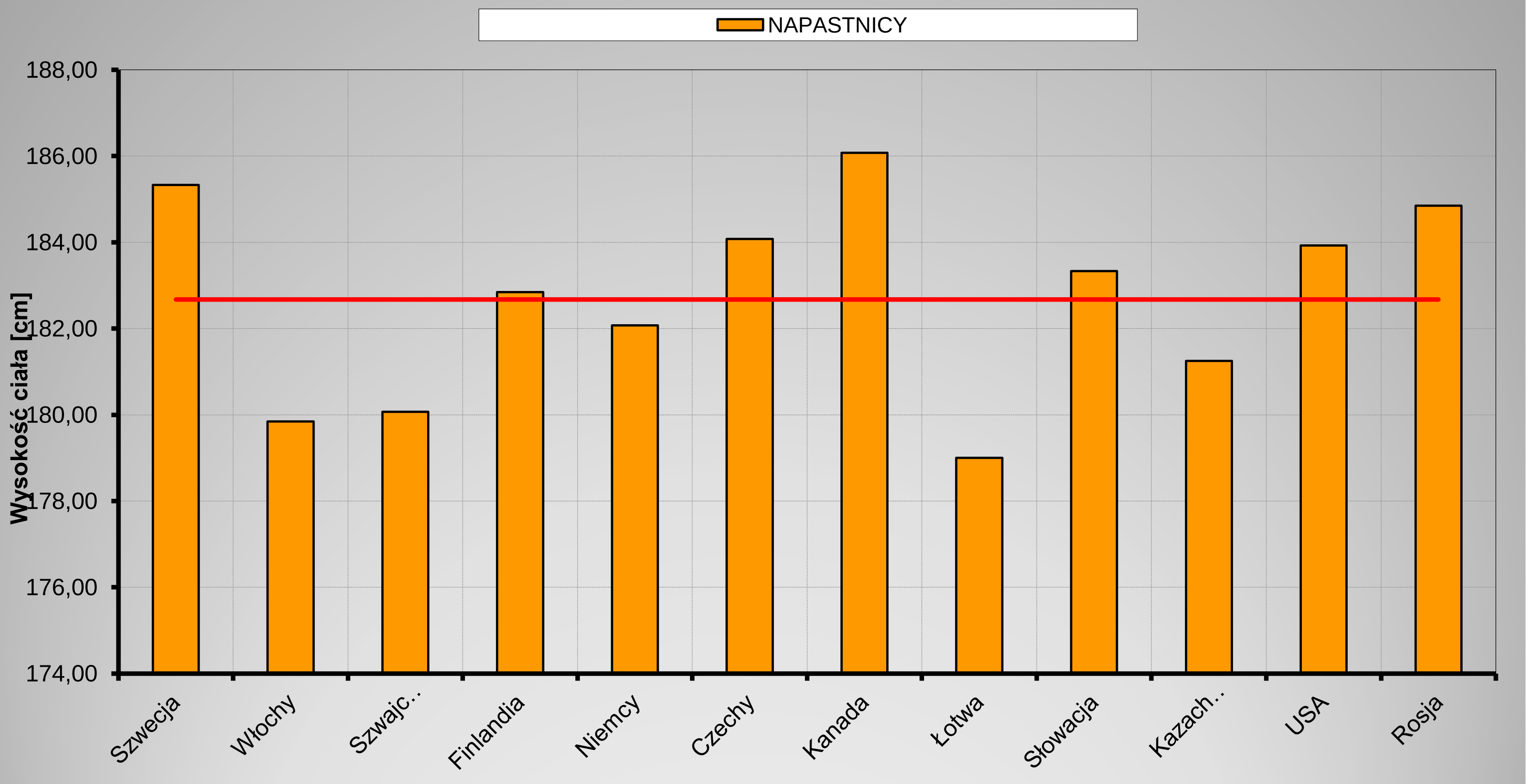
$$\bar{x} = \frac{\dot{x}_1 n_1 + \dot{x}_2 n_2 + \ldots + \dot{x}_i n_i}{n}$$

gdzie: $\bar{x}$ - symbol średniej arytmetycznej,

$\dot{x}_1 \cdots \dot{x}_i$ - środki przedziałów klasowych,

$n_1 \ldots n_i$ - liczba jedn. w danym przedziale klasowym

n - liczebność



NAPASTNICY
Wysokość ciała [cm]
188,00
186,00
184,00
182,00
180,00
178,00
176,00
174,00
Szwecja
Włochy
Szwajc...
Finlandia
Niemcy
Czechy
Kanada
Łotwa
Słowacja
Kazach...
USA
Rosja

Średnia arytmetyczna ważona

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i W_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i}$$

gdzie: $w_i > 0$ tzw. wagi

Zadanie 3

Chcielibyśmy obliczyć ocenę końcową z przedmiotu STATYSTYKA z ocen cząstkowych, przedstawionych w poniższym szeregu:

Rodzaj oceny	Oc.1	Oc.2	Oc.3	Oc.4	Oc.5
oceny za aktywność	4	5	4	4	4
oceny z kolokwium pisemnego	3	2	3		
oceny z odpowiedzi ustnych	3	4			

Dla prowadzącego przedmiot, najistotniejszymi z punktu widzenia oceny końcowej są oceny z kolokwium pisemnego. Dlatego też zastosujemy wagę ocen w stosunku 2:4.

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{4+5+4+4+4+3+2+3+3+4}{10} = \frac{36}{10} = 3,6$$

Rozwiązanie zadania 3

Rodzaj oceny	Oc.1	Oc.2	Oc.3	Oc.4	Oc.5
oceny za aktywność	4	5	4	4	4
oceny z kolokwium pisemnego	3	2	3		
oceny z odpowiedzi ustnych	3	4			

$$\bar{X}_w = \frac{(2\times 4)+(4\times 2,66)}{2+4} = \frac{18,64}{6} = 3,1$$

Modalna to wartość, która w rozkładzie empirycznym występuje najczęściej.

W szeregach szczegółowych i rozdzielczych jest to wartość cechy, której odpowiada największa liczebność.

$$Mo = x_o + \frac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})} k_m$$

x_0	- dolna granica przedziału, w którym występuje modalna,
n_m	- liczebność przedziału modalnej,
n_{m-1}	- liczebność klasy poprzedzającej przedział modalnej,
n_{m+1}	- liczebność klasy następującej po przedziale modalnej,
k_m	- rozpiętość przedziału klasowego modalnej.

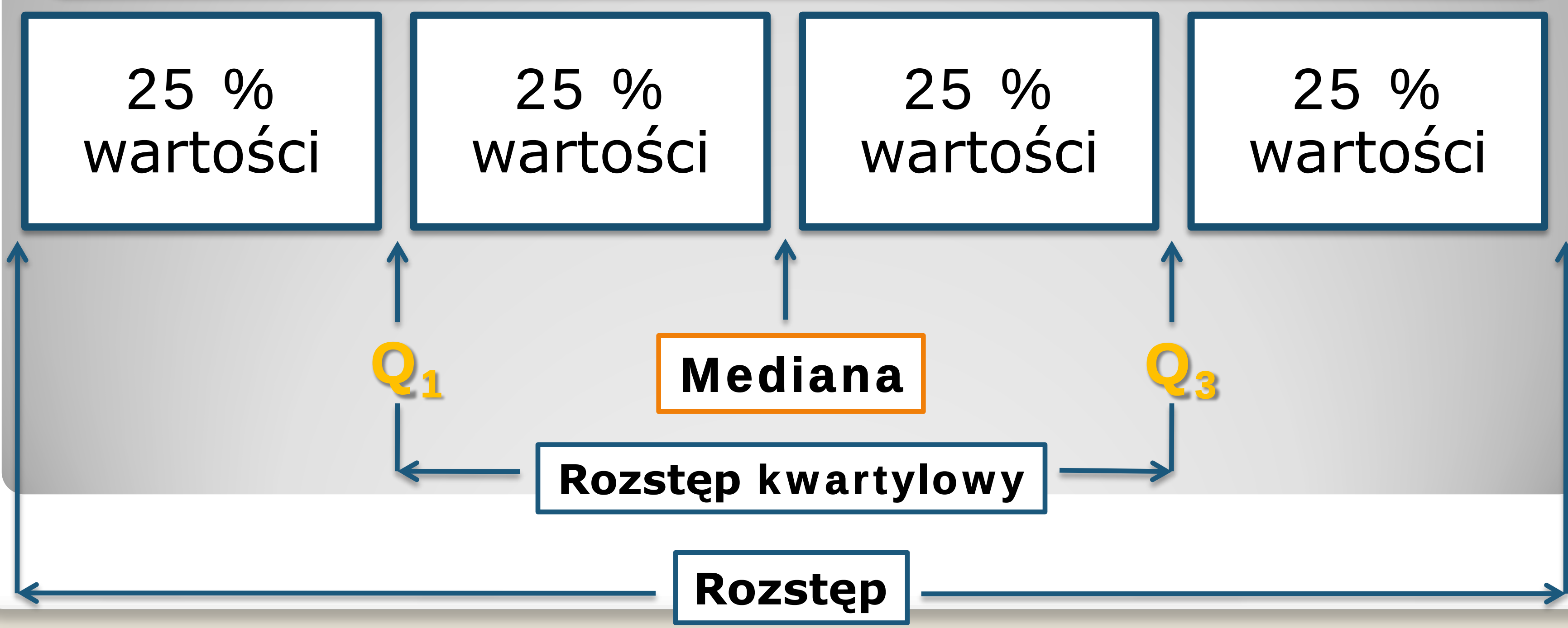
Kwantyle dzielą zbiorowość przedstawioną w postaci szeregu statystycznego na określone części pod względem liczby jednostek. Części te pozostają w stosunku do siebie w określonych proporcjach.

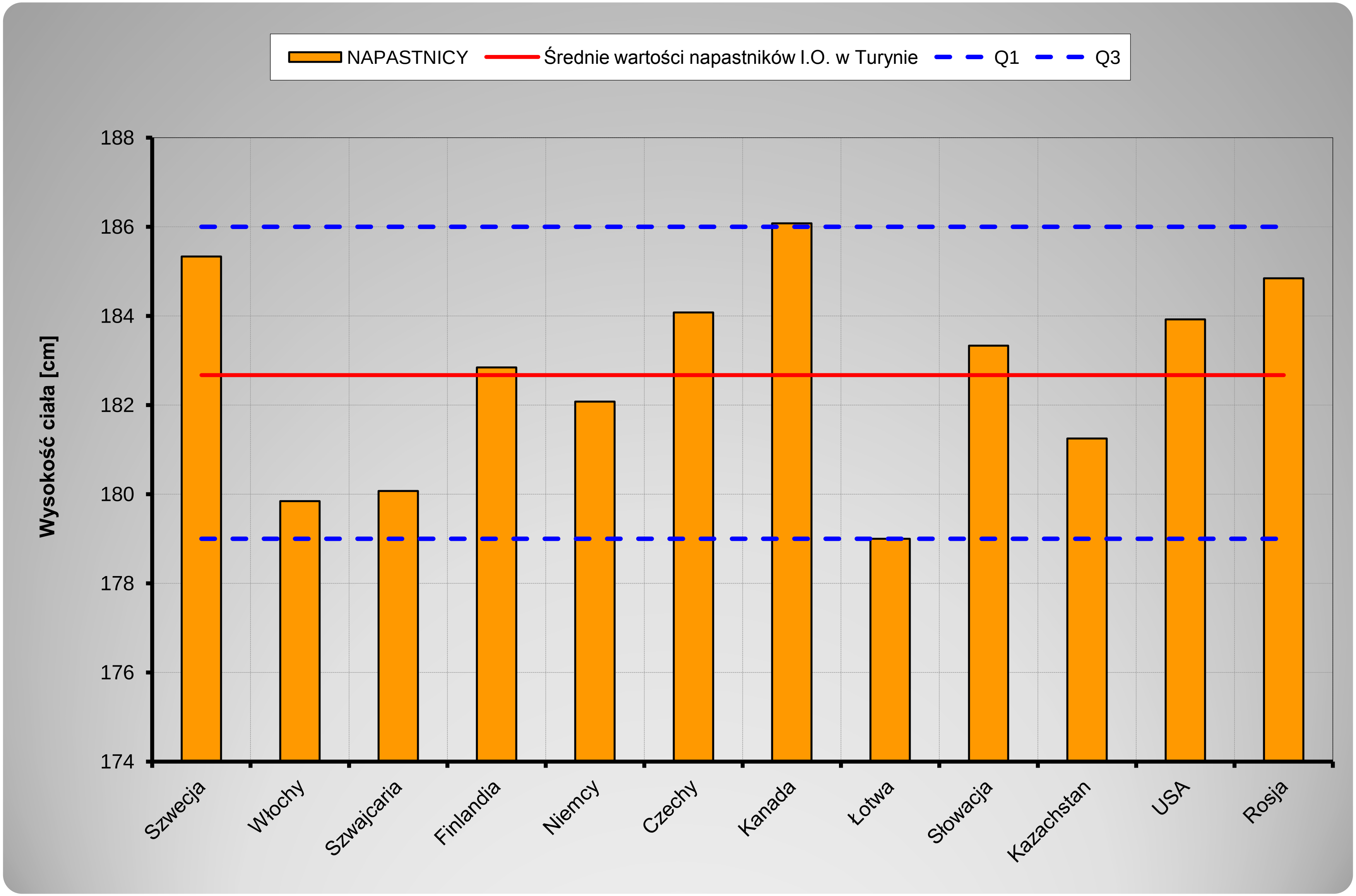
Kwartyle (wartości ćwiartkowe)

Kwartyl pierwszy Q_1 jest to wartość jednostki, dzieląca zbiorowość w ten sposób, że ¼ (25%) jednostek ma od niej wartości nie większe, a ¾ (75%) nie mniejsze.

Kwartyl drugi (mediana, wartość środkowa, Me) to wartość jednostki położonej w ten sposób, że dzieli zbiorowość na dwie równe części.

Kwartyl trzeci Q_3 to wartość jednostki dzieląca zbiorowość w ten sposób, że ¾ (75%) jednostek ma od niej wartości nie większe, a ¼ (25%) nie mniejsze.




NAPASTNICY
Średnie wartości napastników I.O. w Turynie
Q1
Q3
Wysokość ciała [cm]
188
186
184
182
180
178
176
174
Szwecja
Włochy
Szwajcaria
Finlandia
Niemcy
Czechy
Kanada
Łotwa
Słowacja
Kazachstan
USA
Rosja

Wzory na obliczenie mediany w szeregu szczegółowym

w przypadku, gdy *n* jest **nieparzyste**

$$Me = x_{\frac{n+1}{2}}$$

w przypadku, gdy *n* jest **parzyste**

$$Me = \frac{(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})}{2}$$

ZADANIE

W Mistrzostwa Świata w piłce nożnej ilość żółtych kartek otrzymanych przez zawodników reprezentacji narodowych przedstawia się następująco:

Reprezentacja	Kartki
Hiszpania	9
Belgia	6
Turcja	16
Niemcy	13
Anglia	15
Polska	11
Kamerun	6
Nigeria	5

Reprezentacja	Kartki
Brazylia	3
Japonia	8
Holandia	9
Chorwacja	12
Dania	10
Francja	7
Czechy	8
Słowacja	11

Wzór na obliczenie mediany w szeregu rozdzielczym przedziałowym

$$Me = x_m + \frac{k_m}{n_m}\left[\frac{n}{2} - \sum_{i=1}^{m-1} n_i\right]$$

m - numer klasy, w której występuje Mediana,

x_m - dolna granica tej klasy,

n_m - liczebność tej klasy,

k_m - rozpiętość tej klasy,

$\sum_{i=1}^{m-1} n_i$ - liczebność skumulowana do przedziału poprzedzającego klasę, w której występuje mediana.

Wzory na obliczenie kwartyla pierwszego w szeregu szczegółowym

n – podzielne przez 4

$$Q_{1.4} = \frac{x_{\frac{n}{4}} + x_{\frac{n}{4}+1}}{2}$$

n+1 – podzielne przez 4

$$Q_{1.4} = x_{\frac{n}{4}+1}$$

n+2 – podzielne przez 4

$$Q_{1.4} = x_{\frac{n}{4}+0,5}$$

n+3 – podzielne przez 4

$$Q_{1.4} = \frac{x_{\frac{n+1}{4}-0,5} + x_{\frac{n+1}{4}+0,5}}{2}$$

Wzory na obliczenie kwartyla trzeciego w szeregu szczegółowym

n – podzielne przez 4

$$Q_{3.4} = \frac{x_{\frac{3n}{4}} + x_{\frac{3n}{4}+1}}{2}$$

n+1 – podzielne przez 4

$$Q_{3.4} = x_{\frac{3(n+1)}{4}}$$

n+2 – podzielne przez 4

$$Q_{3.4} = x_{\frac{3n}{4}+0,5}$$

n+3 – podzielne przez 4

$$Q_{3.4} = \frac{x_{\frac{3(n+1)}{4}-0,5} + x_{\frac{3n+1}{4}+0,5}}{2}$$

MIARY ZMIENNOŚCI

Rozstęp jest miarą charakteryzującą empiryczny obszar zmienności badanej cechy.

$$R = x_{max} - x_{min}$$

Odchylenie ćwiartkowe – jest połową obszaru zmienności 50% środkowych jednostek zbiorowości.

$$Q = \frac{Q_{3.4} - Q_{1.4}}{2}$$

Współczynnik zmienności – jest względną miarą rozproszenia, służącą do porównywania zróżnicowania dwóch różnych cech lub jednej cechy w dwóch różnych grupach.

$$V = \frac{s}{\overline{x}} \cdot 100\%$$

Jeśli współczynniki zmienności przyjmują wartości liczbowe z przedziału od 0% do 100%, to fakt ten świadczy o niejednorodności zbiorowości.

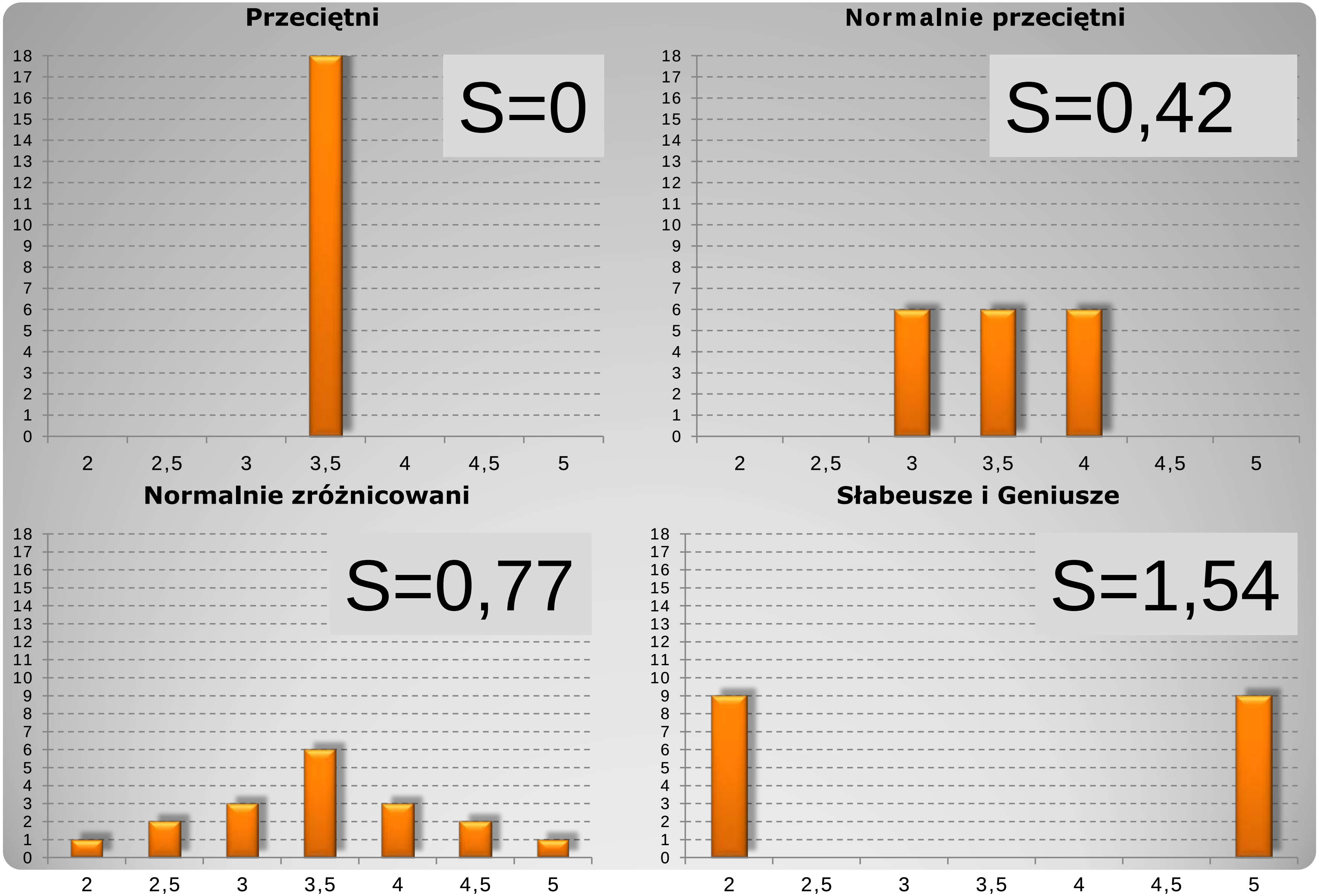
Jeśli V>20%, to zbiorowość jest znacznie zróżnicowana pod względem badanej cechy.

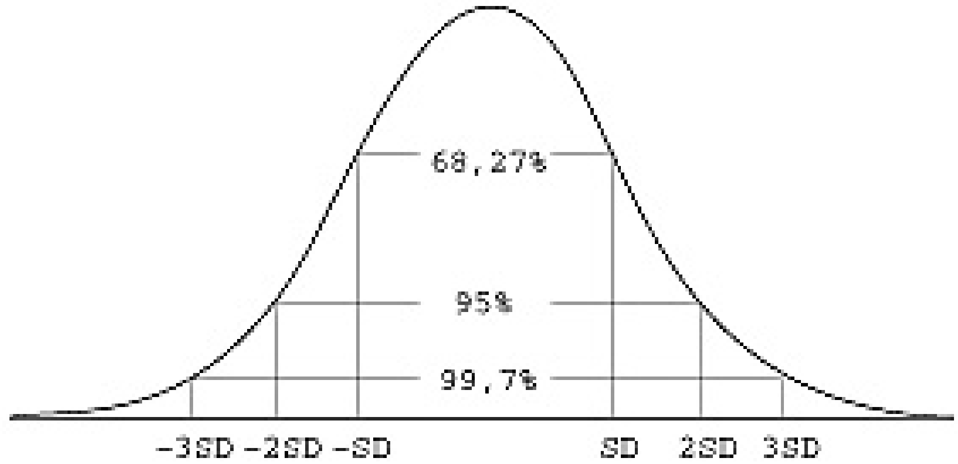
Wariancja – średnia arytmetyczna z kwadratów odchyleń poszczególnych wartości zmiennej od średniej arytmetycznej całej zbiorowości.

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Odchylenie standardowe – pierwiastek kwadratowy z wariancji.

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$


Przeciętni
S=0
Normalnie przeciętni
S=0,42
Normalnie zróżnicowani
S=0,77
Słabeusze i Geniusze
S=1,54
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
2 2,5 3 3,5 4 4,5 5



1) Jest wielkością obliczaną na podstawie wszystkich obserwacji.
2) Można je poddawać przekształceniom algebraicznym.
3) Im zbiorowość jest bardziej zróżnicowana, tym większe jest odchylenie standardowe.
4) Odchylenie standardowe spełnia regułę trzech sigm, według której w przypadku rozkładu normalnego lub zbliżonego do normalnego:
   - blisko 31,73% wszystkich obserwacji różni się od średniej arytmetycznej więcej niż o $\pm s$,
   - tylko około 5% obserwacji wykracza poza przedział $(\bar{x}-2s, \bar{x}+2s)$,
   - tylko 0,3% wszystkich obserwacji wykracza poza przedział $(\bar{x}-3s, \bar{x}+3s)$.

Reprezentacja	Kartki	x_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$
Hiszpania	9	9	-0,31	0,10
Belgia	6	6	-3,31	10,97
Turcja	16	16	6,69	44,72
Niemcy	13	13	3,69	13,60
Anglia	15	15	5,69	32,35
Polska	11	11	1,69	2,85
Kamerun	6	6	-3,31	10,97
Nigeria	5	5	-4,31	18,60
Brazylia	3	3	-6,31	39,85
Japonia	8	8	-1,31	1,72
Holandia	9	9	-0,31	0,10
Chorwacja	12	12	2,69	7,22
Dania	10	10	0,69	0,47
Francja	7	7	-2,31	5,35
Czechy	8	8	-1,31	1,72
Słowacja	11	11	1,69	2,85
				$\Sigma=193,44$

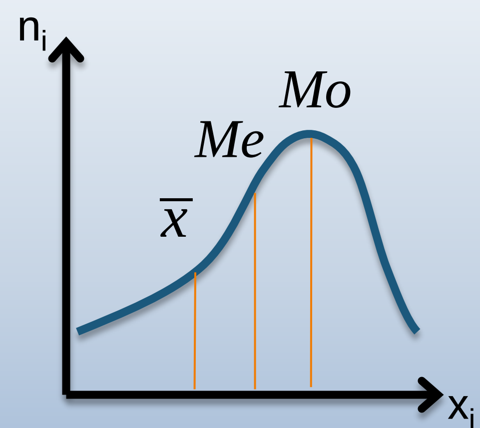
Tabela pomocnicza dla obliczenia wariancji (odchylenia standardowego)

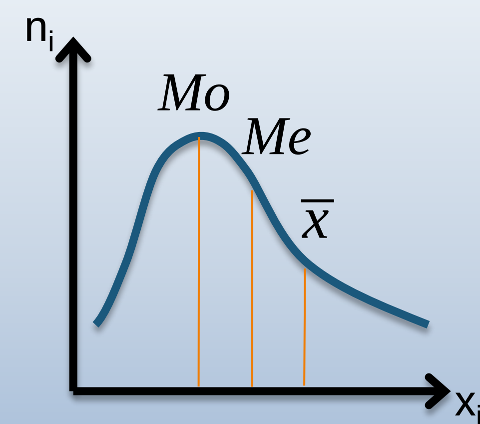
Miary asymetrii

$\bar{x} = Me = Mo$ - rozkład symetryczny

$\bar{x} > Me > Mo$ - rozkład o asymetrii prawostronnej

$\bar{x} < Me < Mo$ - rozkład o asymetrii lewostronnej





Asymetria lewostronna
$\bar{x} < Me < Mo$

Asymetria prawostronna
$\bar{x} > Me > Mo$

Miary asymetrii i koncentracji

Wskaźnik asymetrii (skośności)
Określa kierunek

$$A_s = \overline{x} - Mo$$

Współczynnik asymetrii (skośności) – klasyczno-pozycyjny

$$A_s = \frac{\overline{x} - Mo}{s}$$

Współczynnik asymetrii
tzw. klasyczny, zwany także momentem centralnym rzędu trzeciego.
Określa kierunek i siłę asymetrii

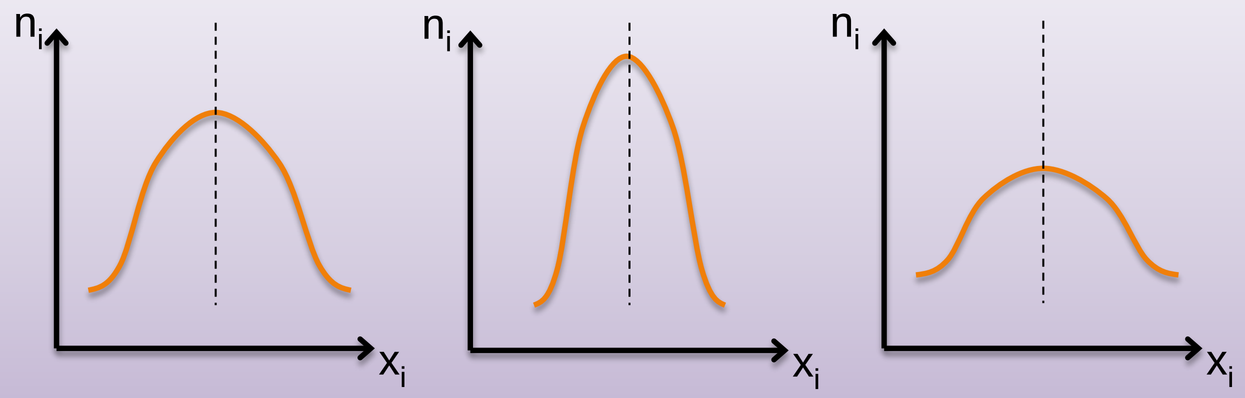
$$A_s = \frac{m_3}{s^3}$$

gdzie: $m_3 = \frac{\Sigma(x_i - \overline{x})^3}{n}$

Interpretacja współczynnika asymetrii:

- **As = 0 rozkład symetryczny**
- **As >0 asymetria prawostronna**
- **As <0 asymetria lewostronna**

Miary koncentracji



Rozkład normalny

Rozkład wysmukły

Rozkład spłaszczony

Współczynnik skupienia (kurtoza) – jest miarą skupienia poszczególnych obserwacji wokół średniej.

$$K = \frac{m_4}{s^4}$$

gdzie:

$$m_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^4$$

Interpretacja współczynnika skupienia:

k <3	**rozkład spłaszczony**
k =3	**rozkład normalny**
k >3	**rozkład wysmukły**

Tabela pomocnicza dla obliczenia wariancji (odchylenia standardowego), asymetrii i kurtozy

x_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^3$	$(x_i-\bar{x})^4$
3				
3				
4				
4				
4				
5				
6				
6				
7				
8				
		$\Sigma=$	$\Sigma=$	$\Sigma=$

Tabela pomocnicza dla obliczenia wariancji (odchylenia standardowego), asymetrii i kurtozy

x_i	$x_i \uparrow$	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^3$	$(x_i-\bar{x})^4$
3	**3**	-2,00	4,00	-8,00	16,00
6	**3**	-2,00	4,00	-8,00	16,00
4	**4**	-1,00	1,00	-1,00	1,00
8	**4**	-1,00	1,00	-1,00	1,00
4	**4**	-1,00	1,00	-1,00	1,00
5	**5**	0,00	0,00	0,00	0,00
6	**6**	1,00	1,00	1,00	1,00
3	**6**	1,00	1,00	1,00	1,00
7	**7**	2,00	4,00	8,00	16,00
4	**8**	3,00	9,00	27,00	81,00
			Σ=26,00	**Σ=18,00**	**Σ=134,00**

$\bar{x}=5$; Me=4,5; Mo=4; $s^2=2,6$; $s=1,61$; $v=32,25$; As=0,43; Ku=1,98